

# SSH 30分-10分タイムズ

## フラクタルと自然の図形

馬場 敦 先生

### 「**KOCH** 曲線」

自然に近い曲線

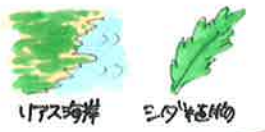
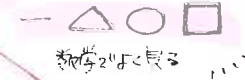
人間にとって...

自然 = 複雑

単純な図形

複雑な図形

1. 線分を3等分し、真ん中を取って除く
  2. 残りの線分と同じ長さの正三角形を作る
- くりかえすと...



正三角形の繰り返しと 雪の結晶の形

### KOCH 曲線の長さ

1. 長さ 1
  2.  $\frac{4}{3}$
  3.  $\frac{16}{9} \rightarrow (\frac{4}{3})^2$
  4. ...
- つまり長さは無限大  $\infty$ ??

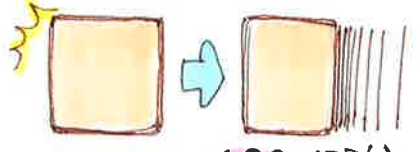
自然とは... 1つの単純作業の繰り返しでできている!!

自己相似: 拡大・縮小すると同じになること

### フラクタル図形

左端から一定の速さで出発して人は右端に到達できない!!

では、正方形を長さをはかると...



線分と面積をはかると...

### かゝとう。

実際の体験を通して 数学と自然との関わりを知ることで、数学に対する興味が増えました。今更"意識"してこなかった身近なものを数学的に見ることが出来る機会が得られたので、今後の学習にも役立てていきたいです。

左端から一定の速さで出発して人は右端に到達できない!!

- 線分 (1次元) の長さは 長さ
- 四角形 (2) " 面積
- 立方体 (3) " 体積

フラクタル図形の次元...

	長さ	面積	体積
1次元	有限の数値	0	0
2次元	$\infty$	有限の数値	0
3次元	$\infty$	$\infty$	有限の数値
?次元 (KOCH)	$\infty$	0	0

はかりかた (=次元) を間違えると、0か $\infty$ になる  
 $\Rightarrow$  コッホには次元がある??

$3^x = 4$   
 $x = \log_3 4 \approx 1.26$

コッホの次元は...

**1.26**

member  
 田村 土屋 原田  
 牧野 三浦  
 Thanks!!

新たなはかりかた = !?

# シーガル

# タイムズ

進学1年2組  
 深澤美優 黒川 温子  
 原 小春 中林 仰輝  
 北岡大空 荒川 祐磨

## 四角形のふしぎ

私たちは、単純な四角形、複雑な四角形という何をも思いうかべるでしょう。単純な四角形は直線や三角形、円など。複雑な四角形とはリアス式海岸やシダ植物の葉の形を思い浮かべるでしょう。しかし右のようなKoch曲線や下の写真のシェルピンスキーがスケッチを見ると複雑な四角形は単純な四角形の組み合わせで成り立っていることが分かります。

### Koch曲線

— 書き方 —

1. 線分を引く
2. 線分を3等分し中央の線分を1辺とする正三角形を描き下の辺を消す。
3. おぼての辺で1-2を繰り返す。



### フラクタルの世界

シェルピンスキーがスケッチや Koch 曲線などをフラクタルと言います。フラクタルは自然なもの(葉の形や地形など)に多くあります。またフラクタルには異次のものが多く長さや面積、体積が存在しなからたりである場合があります。いろいろな事に興味や疑問を抱き、解決しようと試行錯誤することが新発見につながります。

この講座を受けて改めて数学のおもしろさを感じた 黒川  
 Koch曲線を書いた折り紙を使ったのはすばらしいと思ったけれど、案外勉強になった。 原  
 数学だから、難しいからといってあきらめたりせず、なんでも自分のできるところまで頑張ってみることが大切だと思った。 深澤  
 今まで数学はつまらないかと思っていただけ、この講座のおもしろさを知れた。 中林  
 数学の楽しさに初めて気付いた気がした。これからこの興味をわすれずに頑張っていく。 北岡  
 数学はむずかしいと思っていたけれどこの講座をやり、さらにむずかしいと感じました。しかし、興味を知ることができました。 荒川



竹村 長井  
野尻 手塚 今泉

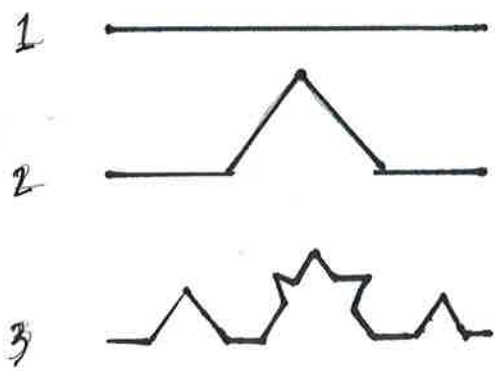
P1-2

# フラクタルと自然の図形

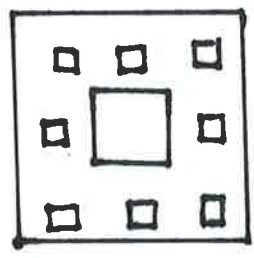
## Seagull Times

12/8 (火)  
シカガール  
ホール

### Koch 曲線



シェルピオン  
スキーカーペット



まず初めに、 $\log_3$  曲線の作図を行いました。 $\log_3$  曲線はフラクタル図形の一種であって、不思議な性質をもちています。スウェーデン数学者のヘルゲ・フォン・コッホ (Helge von Koch) によって提唱されたもので、線としてその長さを測ることができなく、面積や体積として考えてもおかしくなってしまう。この曲線の 0 回目の長さを 1 とすると、1 回目は  $\frac{4}{3}$ 、2 回目は  $(\frac{4}{3})^2$ 、 $n$  回目は  $(\frac{4}{3})^n$  となり、無限の長さとなってしまう。しかし左からなどで無限に右はじに到達しないことはありえないので線としての 1 次元ではなく  $\frac{\log_4}{\log_3}$  次元として考えることとすべきであらうというものです。また似たようなものとして、シェルピオンスキーカーペットがありこれもフラクタル図形のひとつです。



今回のスーパースペースハイスクールの講演を受けて、たくさんの方の事を学びました。第一にこの曲線も書き続けられることによる自然世界に生成される形ができるというところに驚かされました。私は、このような体験をしたことが無かったので感動しました。第二にシェルピオンスキーカーペットという切り絵でも自然世界で生成されるということに感動しました。この経験も将来に生かしたいです。

竹村

# シーガールタイムズ

人工の図形?

私たちの身のまわりにあるすべての物は図形におよ構成されています。その中でも、自然の図形と人工の図形に大別されます。自然の図形とは木の葉の模様のおよ複雑な構造の図形のことをいいます。これは人工の図形とは？それらは、三角形、四角形、円のことをいいます。なぜ、これらが人工の図形と呼ばれているのかというと、これらは人間にとって使いやすく作りやすいためです。例えば、ピンのふさは円形をしているものが多いです。それは、開け閉めしやすいため工場のレーンで大量に生産することができるといいます。また、複雑な構造の図形は、次に説明される Koch 曲線によつて作られているため、フラクタル図形とも呼ばれています。



## KOCH 曲線

まず Koch 曲線とは、1次元でも、2次元でも、3次元でもよい、1.26次元の曲線です。

Koch 曲線の作り方

- ① 一本の直線を3等分する。
  - ② 3等分した真ん中の線を切り抜く。
  - ③ 両側の線の内側の点から正三角形を作る。
- この作業を永遠に繰り返していったものが Koch 曲線です。次にこの曲線の驚くべきポイントを紹介しよう。Koch 曲線の左側の点Pを動かす。そしてその点が一定の速度で右へ進むとします。通常の直線だと左側の点Pが右側の点Pに着くまで、Koch 曲線の場合はその点Pが右側の点Pに着くまで、この作業を繰り返す。これは、Koch 曲線が永遠に伸び続けるということになります。

0回目



1回目



n回目



## 感想

member

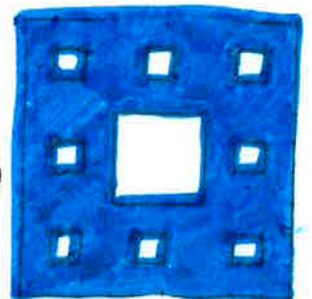
加持翔哉 河田悠真 関口颯太  
高島海斗 蜂須尾亮

Koch 曲線は、正三角形を増やしていくことで、線分間の距離が  $1/3$  ずつ減っていくという現象が起きることによって、とても驚いた。また、その結果として正三角形を増やしていくことで、人工の図形でも、Koch 曲線を作っていく操作を繰り返していくことで、リアス式海岸などの自然界にあるものの形に近づけることができるということも面白かった。

H27.12.9

## Sierpinski gasket

ある平面上、立体上に相似の図形を増やし続ける操作。次元は平面の場合、直線より大きく平面より小さいつまり1次元以上2次元未満で、立体上では平面より大きく、立体より小さいつまり2次元以上、3次元未満の図形になる。



# SSH シーガールタイムズ

H27.12.9

## KOCH 曲線

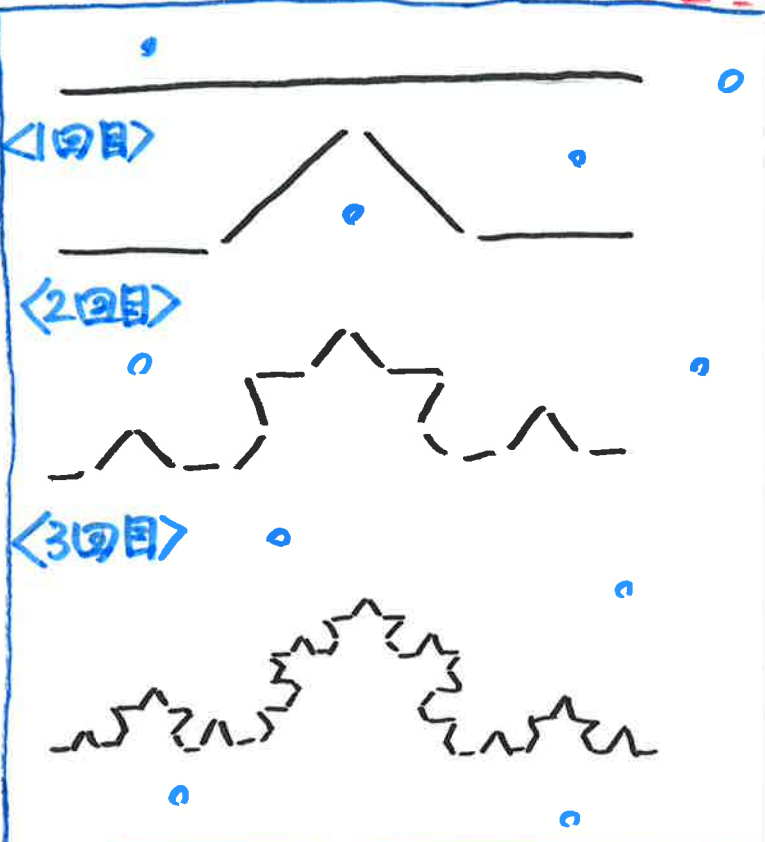


- メンバー
- 荒川 尚輝
  - 井腰 直也
  - 岩渕 慈周
  - 大塚 登夢
  - 青喜 多優也

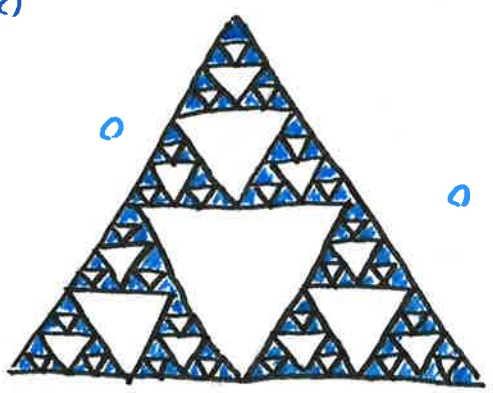
私達は自然界に存在する様々な図形を複雑なものだと考えているが、実際は単純な作業の例として KOCH 曲線が挙げられる。

KOCH 曲線は直線を三等分し、真ん中の部分を取り去って同じ長さ(古)の2本の辺を用いて山をつくり、(右図参照→)この繰り返しによってできた線である。

この繰り返しは無限に行うことができ、長さや面積などの単位ではこの図形を計量することはできない。つまり、1次元や2次元などの整数次元に属さないことが判明した。つまり、1.26次元!

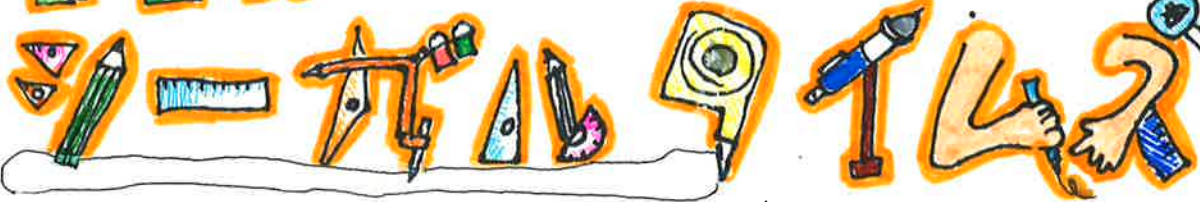


また他にも  
シェルピンスキーガスケット



## 感想

今回の講義を通して私達は今まで知らなかった新たな次元の図形の存在を知ることができました。またその新たな次元を発見するためには常識にとらわれない発想の転換が必要ということもわかりました。数学の基礎的・本質的な根幹を成す要求を垣間見ることによって、先人達の世界を解明せんとする思考に触れるような気がしました。



メンバー

- 飯塚 未久
- 大久保 実音
- 大嶋 祐奈
- 木村 詩音
- 葛賀 桃子

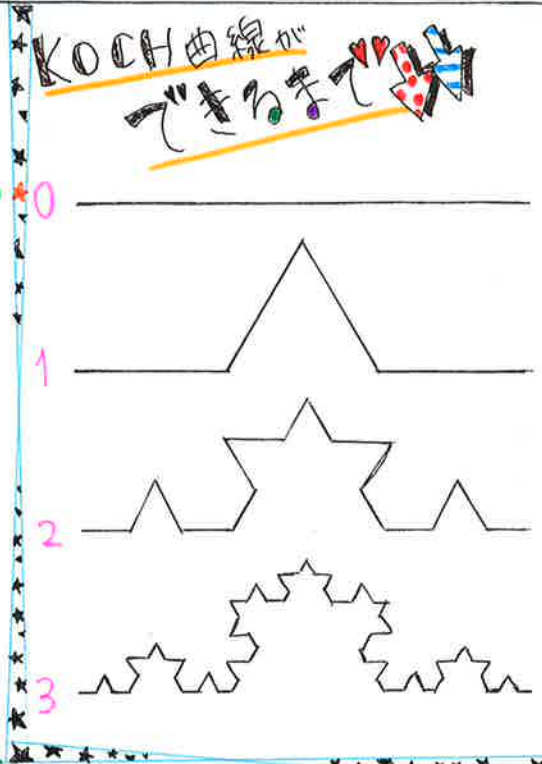
—— フラクタルと自然の図形 ☆ 馬場 淳 先生 ——

コッチじゃなくて  
コッチだよ!

# KOCH曲線 知ってるかい

## 【作り方】

- ① 線分を3等分
- ② 真ん中を取り去る
- ③ 残りの線分と同じ長さの線を立てて正三角形をつくる
- ④ すべての線分で ①~③ を繰り返す



## 【自己相似】

- ① から ④ を何度も繰り返して複雑になっても、一部を拡大してみると.....?
- 図の 0~2 などの簡単な図形と合同!
- 自己相似である!

自然の中にある形は → 単純な形のくり返して複雑に見えるが..... できている!

## 次元の Future ☆

私たちの生活する立体の世界。3次元。しかし、そんな形はもっと細かきものからできているのだ。ものを造るときは、まず誰もが線を描くだろう。そして、その線は、1次元となる。線は長さとして測る。次は2次元。例えば、線を3本つなげると、三角形となる。つまり、図形となるのだ。そして面積として測る。

私たちのいる3次元は、たてよこ、奥行き、立体で表し、体積として測る。このように、次元には、それぞれ測り方がある。ではコッチではどうだろうか。コッチは複雑な計算をして、1.26次元とでているが、これはどのよう測るのだろうか? これから長い年月を経ていつか、それが解明される時を楽しみに待とうとしよう。

## 感想

今回の講義を通じ、一見複雑に見える模様も、単純な作業の繰り返しの結果であることが分かり、身のまわりのもの達、一面が見えやすくなった。

<次元の種類と測り方> 0と∞の間に、何かがいい測り方がある!

	長さ	面積	体積
1次元	有限の数値	0	0
2次元	∞	有限の数値	0
3次元	∞	∞	有限の数値
コッチ曲線	∞	0	0

新たな測り方がある!

12月8日

シーガルホール

# シーガルタイムズ

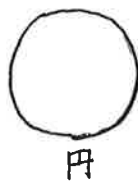
~ 数理講座 ~

坂村 琴音  
 宮島 愛弓  
 吉田 萌華  
 寶利 秀一  
 船田 幸喜

## フラクタルと自然の図形

(人間にとって単純な図形)

(人間にとって複雑な図形)

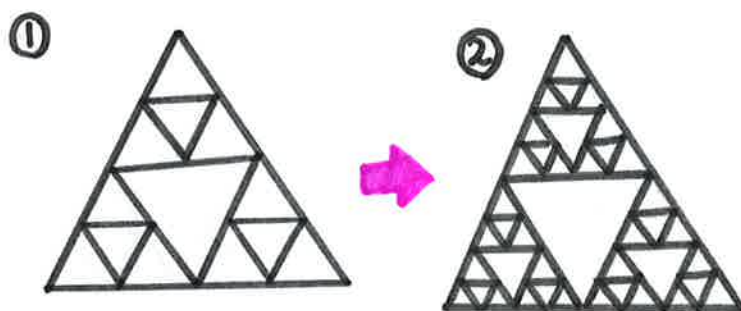


## koch 曲線

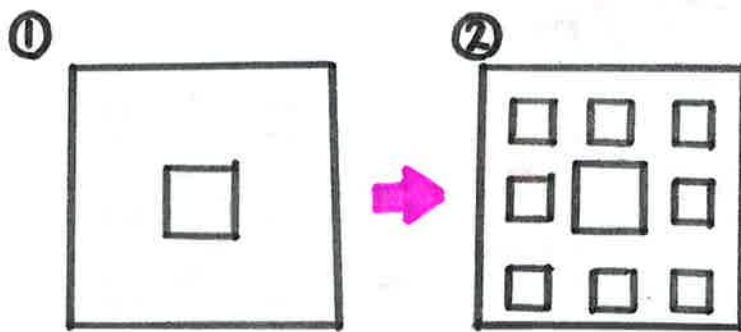
- ・0回目 直線の長さを1としたとき  
長さ: 1
- ・1回目 長さ:  $\frac{4}{3}$
- ・2回目 長さ:  $(\frac{4}{3})^2 \approx 1.7$
- ・3回目 長さ:  $(\frac{4}{3})^3 \approx 2.4$

直線を3等分して真ん中を取る。空いているところに正三角形を書く。これを繰り返す。正三角形で同じことをすると、雪の結晶のような形ができる。

## シェルピンスキ-ガゼット



三角形の各辺の中点をとって切り取る



正方形の各辺の  $\frac{1}{3}$  をとって切り取る

## 感想

私物が多い知らない  
 たての応用のし方や  
 書き方がおもしろい  
 乙平がすごい  
 吉田 萌華

自然は私たちが想像する  
 ような曲線をつくるのが難しい  
 私たちの目に見える自然の  
 曲線は Koch 曲線をつか  
 ったものであるということ  
 学んだことで、私たちの世  
 界は自然などあらゆるものが  
 数学でできていることを知  
 りました。  
 宮島 愛弓

普通の授業では  
 教わることのない  
 ような図形の  
 書き方を知って  
 数学の奥深さを  
 知ったと思います。  
 坂村 琴音

数学は様々な  
 ことに応用できるの  
 だと、あらためて  
 わかりました。  
 寶利 秀一

数学は自然との  
 結びつきが強い  
 ということを学びま  
 した。  
 船田 幸喜

# シーガールタイム

- ・古澤留奈
- 加藤光広
- 林 龍太郎
- 木村 勇介
- 宮野紫穂

## ① Koch 曲線



自然の図形は...  
単純な動きをくり返して  
できている!!

(例) 雪の結晶

< Koch 曲線の長さ >

1回目	1	4回目	$(\frac{4}{3})^3$
2回目	$\frac{4}{3}$	5回目	$(\frac{4}{3})^4$
3回目	$(\frac{4}{3})^2$	6回目	$(\frac{4}{3})^5$

## ② シェルピンスキーカーペット



- ① 正方形の長さの  $\frac{1}{3}$  の正方形を真ん中からくり抜く
- ② 正方形がまたできるので、できた正方形の真ん中をくり抜く
- ③ ①・②のくり返し!!



← これは「シェルピンスキーカーペット」の三角形バージョンであり、「シェルピンスキーガasket」と言います。これも「シェルピンスキーカーペット」と同じように作ります!!

かろ♡♡

リアス式海岸のような複雑な図形も、Koch 曲線を使い表すことができてびっくりしました。シェルピンスキーカーペットは、簡単に見えて、意外と作るのが難しいので苦戦しました。図形の不思議さを知ることができてよかったです。

古澤留奈

自然の複雑な図形を単純な動きをくり返して作ることができることに気づきました。シェルピンスキーカーペットを作るのが、苦戦しましたが、大変楽しかったです。図形の不思議さを知ることができてよかったです。

宮野紫穂

Koch 曲線を書くのは大変でしたが、続けているうちに夢中になってとても楽しかったです。Koch 曲線が雪の結晶の一番と知られたときはとても驚きました。シェルピンスキーカーペットは、豆粒を使って作る結構簡単に作ることができました。

木村勇介

シェルピンスキーカーペットをやってみて、最初はとても簡単かなと思っていましたが、実際にやってみるととても大変でした。でも、図形の鬼物を知りました。なので、図形についてもっと調べたいと思います。

林龍太郎

Koch 曲線とシェルピンスキーカーペットをやってみると、とても難しいです。いろいろな図形があることが分かったので、とても楽しかったです。

加藤光広



# SSH シーガールタイムズ

フラクタル図形とその次元について

## ○フラクタル図形とは...

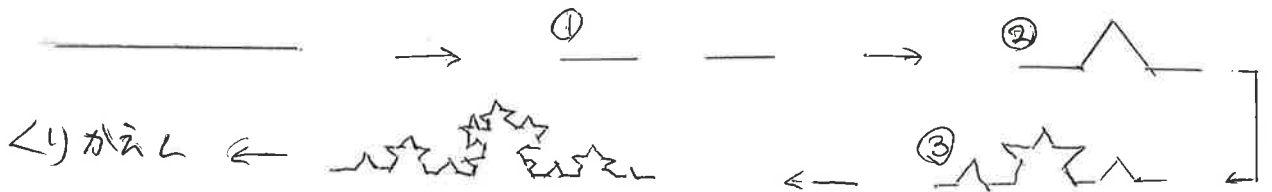
フラクタル図形とは、自らの図形を拡大縮小すれば、自己相似な図形になる図形のことである。

member

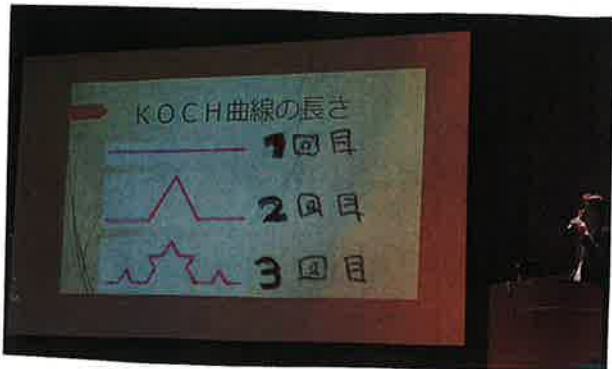
- 齋藤 駿
- 坂上 雅哉
- 田島 秀星
- 堀 碧泉
- 小森谷 香帆

## ○ Koch 曲線

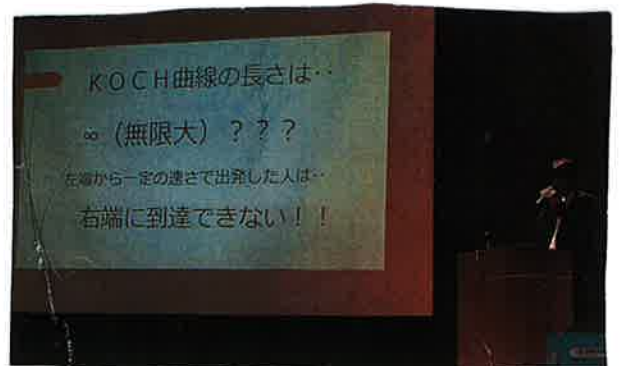
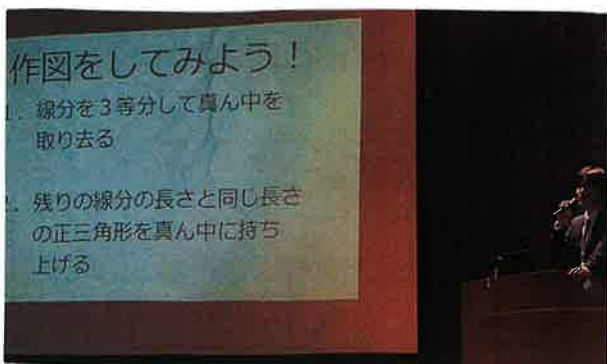
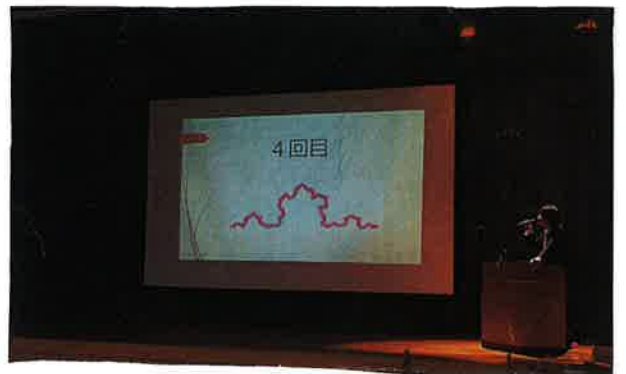
1. 直線を3分の1して、その真ん中で正三角形を作る。
2. できた直線をまた3分の1し、その真ん中で正三角形を作る。
3. 1.2のくり返し。



これをくりかえしていくと、だんだん雪の結晶のような規則的な図形ができてくる。このことから、自然は、単純な図形からできあがっているのかもしれない。また、ここで注目すべきな点は、左右「対称」であるという点である。そして、 $n$ 回目( $n$ はとて大きい回数とせよ)と $n-1$ 回目の図形の差はほとんどない。



3回目と4回目はほぼ同じに見える。



# フラクタル図形の次元

• 線分: 2分の1に縮小した図形が2個含まれているので

$$2^x = 2$$

$$\log_2 2 = 1$$

となり 1次元だとわかる

• 正方形: 線分と同様に考えると図形に4個含まれているので

$$2^x = 4$$

$$\log_2 4 = 2$$

となり 2次元だとわかる。

• 立方体: 立方体も上に同様に考えると図形に8個含まれているので

$$2^x = 8$$

$$\log_2 8 = 3$$

となり 3次元だとわかる。

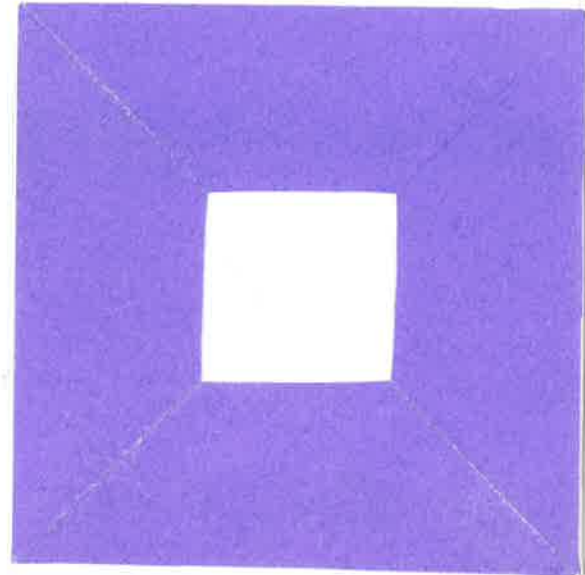
以上と同様に Koch 曲線も考えると

$$3^x = 4$$

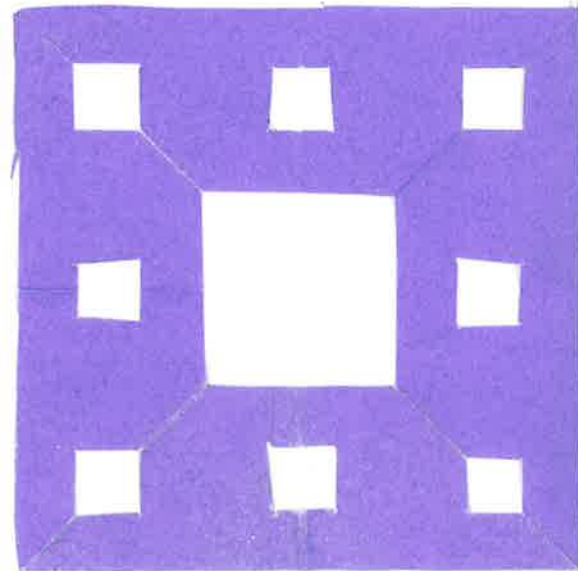
$$\log_3 4 = 1.26$$

となるので Koch 曲線は 1.26次元だとわかる。

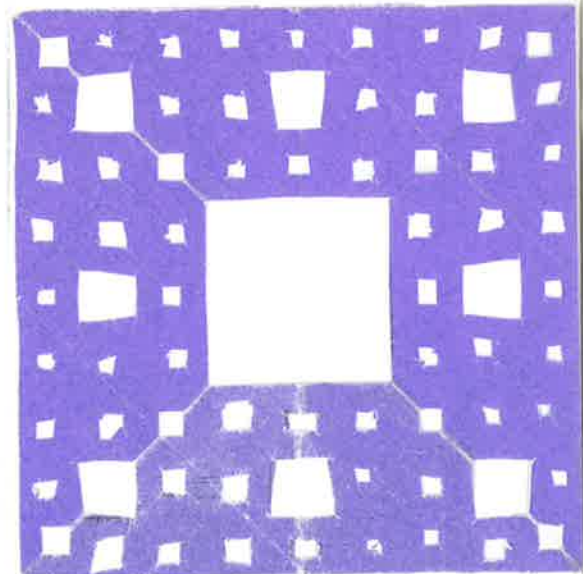
1回目



2回目



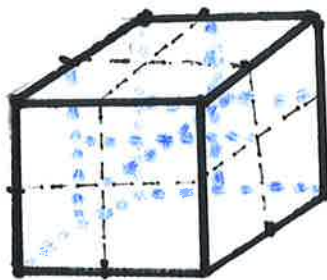
3回目



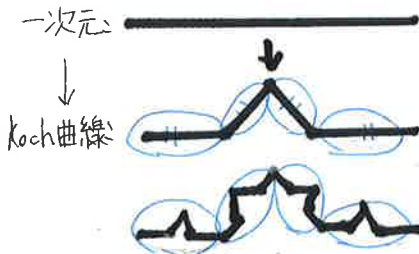
1次元



3次元

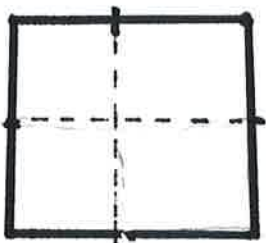


Koch 曲線



このように  
段階を  
踏んで先  
同じのが  
4つ現れている。

2次元



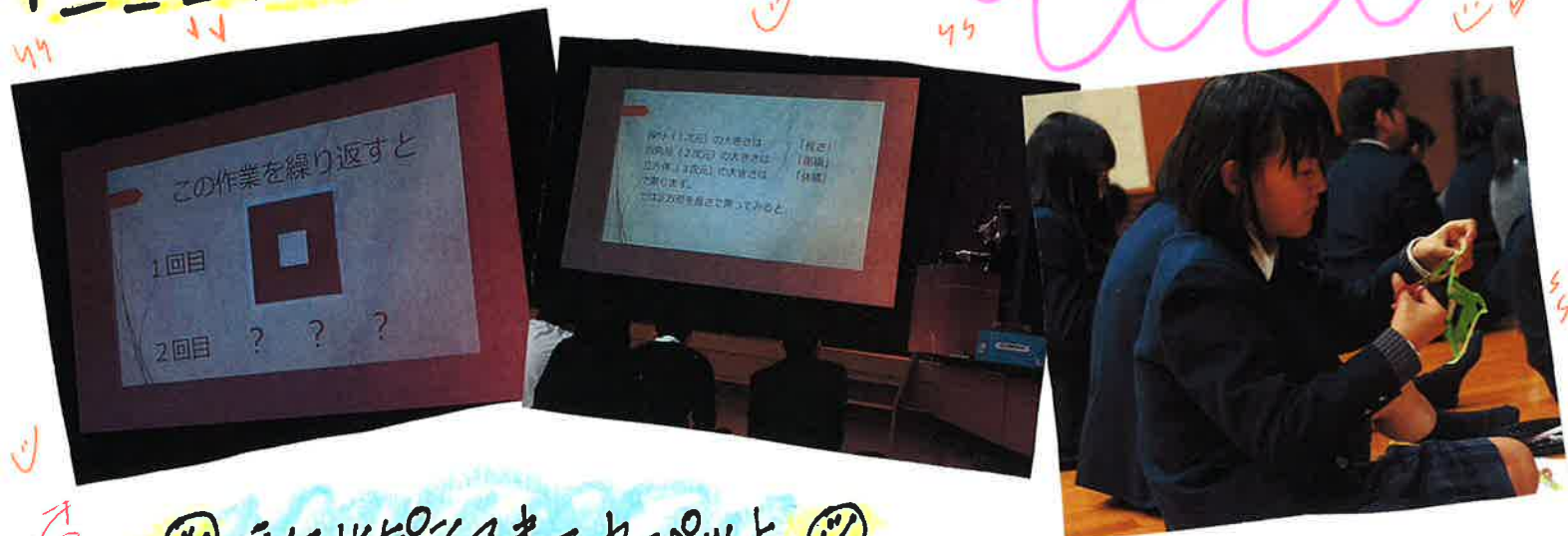
# シーガル 互換式

2班 ☺ 関口愛里・亀山千春・増田みかり  
齋藤拓真・川倉拓真

## 『フラクタルと自然の図形!!!』

### Koch 曲線

- ① 線分を3等分し真ん中を取り去る。
- ② 残りの線分の長さと同じ長さの正三角形を真ん中に持ち上げる。



### シエルビンスキーカーペット



（正方形を9等に  
分け、真ん中を  
取りぬく!!）

（さらに9等に  
分け、取りぬく!!）

感想 ☺  
あつ ②形の性質について色々なことが学ばれました!!  
増田 1回2回3回と Koch 曲線がだんだん複雑になるのが面白かったです。  
らほろ 作業が楽しかった! 数学に少し興味をもちました。  
有藤 数学に興味をもちました。不思議な感覚になりました。  
川倉 参加できてよかったことが残念ではない。